УПРОЩЕННОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕОДНОЗНАЧНОСТИ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ МАГНИТОСТАТИКИ

© 2025 г. Андрей Владимирович Никитин[1]*

[1] – Институт физики металлов им. М.Н. Михеева УрО РАН, 620108 Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, д. 18

** - an@imp.uran.ru*

Теоретическое исследование обратных задач магнитостатики является необходимым и важным этапом для увеличения информативности широко используемого в дефектоскопии MFL метода. Итак, сформулируем обратную задачу (ОЗ) магнитостатики.

Пусть пространственная область V, занятая ферромагнетиком и окруженная немагнитной средой, помещена во внешнее магнитное поле с напряженностью $\boldsymbol{H}_0$. По измеренной напряженности результирующего магнитного поля $\boldsymbol{H}_e$ вне V требуется восстановить физические параметры ферромагнетика (магнитную проницаемость μ) и/или форму поверхности $S(V)$, ограничивающую область ферромагнетика V.

Строго вопрос случаев однозначности-неоднозначности решения ОЗ магнитостатики был сформулирован в [1, 2] с помощью основного уравнения магнитостатики, решаемого в вещественном гильбертовом пространстве вектор-функций L_2. Авторы, записав основное уравнение магнитостатики в операторном виде (исследовав свойства получившегося оператора) и используя разложение Вейля пространства L_2 в сумму трех ортогональных подпространств, доказали неединственность (в общем случае) решения обратной задачи магнитостатики. Выбор пространства L_2 авторы [1, 2] объясняют тем, что L_2 соответствует физическому смыслу искомых величин, поскольку конечность магнитной энергии магнетика предполагает квадратичную суммируемость векторов магнитного поля (энергия магнетика пропорциональна $\int_V \boldsymbol{BH}d\boldsymbol{r}$) и пространство L_2 «достаточно широко, чтобы в нем содержались векторы магнитного поля для всего круга практически встречающихся магнитостатических задач» [2]. Однако строгое исследование в работах [1, 2] было весьма громоздким и опиралось на глубокие понятия функционального анализа (геометрия гильбертова пространства, линейные операторы, спектральная теория, пространства суммируемых функций, интегро-дифференциальные уравнения). Этот факт затруднял многим физикам понимание сути проведенного в [1, 2] исследования.

Но оказалось, что основные идеи доказательства случаев неединственности решения ОЗ можно показать, оставаясь в рамках классического математического анализа. Это значительно облегчает понимание основных причин неединственности решения ОЗ магнитостатики. Применим этот подход для решения ОЗ магнитостатики [3, 4]. Пусть имеется пространственная область V, ограниченная поверхностью S, и пусть во всех точках этой области заданы дивергенция и ротор вектора $\boldsymbol{a}$. А во всех точках поверхности S заданы значения нормальной составляющей вектора $\boldsymbol{a}$.

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{a}) = \rho(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r} \in V;\ \mathrm{rot}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r} \in V;\ a_n = f(M),\ M \in S, \tag{1}$$

условиями (1) векторное поле $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ восстанавливается однозначно [3, 4]. Для доказательства неоднозначности решения ОЗ удобно использовать основное уравнение магнитостатики (эквивалентное системе уравнений Максвелла [2]), после соответствующих преобразований это уравнение выглядит следующим образом:

$$\vec{\nabla}\left(\iiint_V \frac{\acute{div}\,\boldsymbol{M}(\acute{r})}{|\boldsymbol{r}-\acute{r}|} d\acute{V} - \oiint_S \frac{M_n(\acute{r})}{|\boldsymbol{r}-\acute{r}|} d\acute{S}\right) = 4\pi(\boldsymbol{H}_e(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{r})), \tag{2}$$

где $\boldsymbol{M}$ – намагниченность ферромагнетика, M_n – её нормальная составляющая на S.

Покажем, что уравнение (2) для определения $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r})$ в V имеет бесчисленное множество решений, что влечет, например, неоднозначность определения μ. Пусть $\boldsymbol{M}_0(\boldsymbol{r})$ – решение уравнения (2), то есть при подстановке его в (2) получаем тождество. С помощью (1) найдем вектор-функцию $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{r})$, для которой $\rho(\boldsymbol{r}) = 0$; $f(M) = 0$; с произвольной функцией $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{r})$, с единственным ограничением $\mathrm{div}(\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{r}))=0$, тогда непосредственной подстановкой в уравнение (2) нетрудно убедиться, что, если $\boldsymbol{M}_0(\boldsymbol{r})$ является решением уравнения (2), то и $\boldsymbol{M}_0(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{b}(\boldsymbol{r})$ тоже является решением этого уравнения. Поскольку можно найти бесконечное число $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{r})$, то уравнение (2) имеет бесконечно много решений.

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России для ИФМ УрО РАН.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дякин В.В., Кудряшова О.В., Раевский В.Я.* К вопросу о корректности прямой и обратной задачи магнитостатики. Часть 2 // Дефектоскопия. 2018. № 10. С. 15–24.
2. *Дякин В.В.* Математические основы классической магнитостатики. Екатеринбург: ИФМ УрО РАН, 2016. 403 с.
3. *Кочин Н.Е.* Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М.: Наука, 1965. 427 с.
4. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗОВ. М.: Наука, 1986. 544 с.